Príprava na 2. semestrálny test

1 Úloha. Nech A, B, C sú výrokovo-logické premenné. Určite, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú výrokovo-logické tautológie.

1. $(A \wedge B \to C) \leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$.
2. $(A \vee B \to C) \leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$.
3. $\neg(A \to B) \leftrightarrow A \wedge \neg B$.
4. $(A \to \neg A) \to A$.
5. $(\neg A \to A) \to A$.

2 Úloha. Uvažujme binárny predikát p nad oborom prirodzených čísel definovaný vzťahom:

$$\forall x \forall y \Big(p(x,y) \leftrightarrow 2y + 1 < 2x \Big).$$

Určite pravdivostnú hodnotu nasledujúcich výrokov. Vašu odpoveď zdôvodnite len pre nepravdivé tvrdenia.

1. $\forall x \exists y \, p(x,y)$.
2. $\forall x \exists y \, p(x+1,y)$.
3. $\forall y \exists x \, p(x,y)$.
4. $\exists y \exists x \Big(p(x,y) \wedge p(y,x) \Big)$.
5. $\forall x \forall y \Big(p(x,y) \to \neg p(y,x) \Big)$.

3 Úloha. Uvažujme binárny predikát p nad oborom celých čísel definovaný vzťahom:

$$\forall x \forall y \Big(p(x,y) \leftrightarrow x^2 \leq y^2 \Big).$$

Určite pravdivostnú hodnotu nasledujúcich výrokov.

1. $\forall x \exists y \, p(x,y)$.
2. $\forall y \exists x \, p(x,y)$.
3. $\exists y \forall x \, p(x,y)$.
4. $\exists x \forall y \, p(x,y)$.
5. $\forall x \forall y \Big(p(x,y) \wedge p(y,x) \to x = y \Big)$.

4 Úloha. Uvažujme predikáty p a r nad oborom celých čísel definované vzťahom:

$$\forall x\Big(p(x) \leftrightarrow x^2 = 2 - x\Big)$$
$$\forall x\Big(r(x) \leftrightarrow \neg\exists y\, x = 2y + 1\Big).$$

Určite pravdivostnú hodnotu nasledujúcich výrokov. Vašu odpoveď zdôvodnite len pre nepravdivé tvrdenia.

1. $\forall x\Big(p(x) \rightarrow x > 0\Big)$.
2. $\exists x\Big(p(x) \rightarrow x > 0\Big)$.
3. $\exists x\Big(p(x) \wedge r(x) \wedge x \leq 0\Big)$.
4. $\forall x\Big(\neg r(x) \rightarrow \neg p(x)\Big)$.
5. $\exists x\Big(\neg p(x) \rightarrow x^2 < 0\Big)$.

5 Úloha. Nájdite obory pravdivosti nasledujúcich výrokových foriem

$$\{x \in R \mid 5x - 3 < |3 - 4x| < 2 - x\}$$
$$\{x \in R \mid |5x - 3| < |3 - 4x|\}$$
$$\{x \in R \mid |3 - 4x| < |2 - x|\}.$$

Dokážte, že vaše riešenie je správne.

Návod. V dôkaze využite tieto dve vlastnosti absolútnej hodnoty reálnych čísel:

$$\forall x \forall y(y < |x| \leftrightarrow y < x \vee y < -x)$$
$$\forall x \forall y(|x| < y \leftrightarrow x < y \wedge -x < y).$$

6 Úloha. Predikát deliteľnosti $x \mid y$ nad oborom celých čísel je definovaný vzťahom

$$\forall x \forall y(x \mid y \leftrightarrow \exists z\, y = xz).$$

Dokážte, že platí

$$\forall x(5 \mid x^2 \leftrightarrow 5 \mid x).$$

7 Úloha. Dokážte, že $\sqrt{5}$ nie je racionálne číslo.

8 Úloha. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 0$ platí

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad \text{pre } q \neq 1$$
$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

9 Úloha. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 0$ platí

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i i^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}.$$

10 Úloha. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq m$ platí

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

V dôkaze využite nasledujúcu kombinatorickú identitu:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \tag{1}$$

11 Úloha. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 5$ platí

$$n^2 < 2^n.$$

12 Úloha. Nech f_n je postupnosť prirodzených čísel definovaná vzťahom:

$$f_0 = 0$$
$$f_1 = 1$$
$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 0$ platí

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$$
$$\sum_{i=0}^{n} f_i^2 = f_n \times f_{n+1}$$
$$\sum_{i=0}^{n} i f_i = n f_{n+2} - f_{n+3} + 2.$$

13 Úloha. Nech a_n je postupnosť čísel definovaná vzťahom:

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = -3$$
$$a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}.$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 0$ platí

$$a_n = (-2)^n - 1.$$

14 Úloha. Nech a_n je postupnosť čísel definovaná vzťahom:

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 7$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + 12a_n.$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 0$ platí

$$a_n = 4^n - (-3)^n.$$

15 Úloha. Nech a_n je postupnosť prirodzených čísel definovaná vzťahom:

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 3$$
$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n.$$

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 0$ platí nerovnosť

$$a_n < 2^n.$$