Ústne otázky pre hodnotenie A/B

Kombinatorické identity. Pomocou kombinatorických argumentov dokážte nasledujúce vlastnosti kombinačných čísel:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \qquad \text{pre } n \geq 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1} \qquad \text{pre } n \geq 1$$

Efektívny výpočet Fibonacciho postupnosti. Zápis f_n označuje postupnosť prirodzených čísel, ktorej prvkami sú Fibonacciho čísla:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n. \end{aligned}$$

Uvažujme ternárnu funkciu g definovanú primitívnou rekurziou so substitúciou v parametroch:

$$\begin{aligned} g(0, a, b) &= a \\ g(n+1, a, b) &= g(n, a+b, a). \end{aligned}$$

Tvrdíme, že platí

$$f_{n+1} = g(n, 1, 0). \tag{1}$$

Dôkaz. Najprv dokážeme pomocné tvrdenie

$$\forall k\, g(n, f_{k+1}, f_k) = f_{n+1+k}. \tag{2}$$

To dokážeme matematickou indukciou podľa n.

Základný krok. Pre $n = 0$ tvrdenie platí, pretože

$$g(0, f_{k+1}, f_k) = f_{k+1} = f_{0+1+k}.$$

Indukčný krok. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n:

$$\forall k\, g(n, f_{k+1}, f_k) = f_{n+1+k}. \tag{IP}$$

To je indukčný predpoklad. Dokážeme, že platí aj pre $n + 1$:

$$\forall k\, g(n+1, f_{k+1}, f_k) = f_{n+1+1+k}.$$

Zvoľme si ľubovolné číslo k. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} g(n+1, f_{k+1}, f_k) &= g(n, f_{k+1} + f_k, f_{k+1}) = g(n, f_{k+2}, f_{k+1}) = \\ &= g(n, f_{k+1+1}, f_{k+1}) \overset{\text{IP}}{=} f_{n+1+k+1} = f_{n+1+1+k}. \end{aligned}$$

Všimnime si, že sme IP použili s parametrom $k+1$ a nie s k!

Teraz už môžeme dokázať požadované tvrdenie (1):

$$f_{n+1} = f_{n+1+0} \overset{(2)}{=} g(n, f_{0+1}, f_0) = g(n, f_1, f_0) = g(n, 1, 0). \qquad \square$$