Vzorový príklad pre 4. domácu úlohu

Ján Komara

28. novembra 2013

Príklad

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n a m platí vzťah

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Návod. V dôkaze využite túto vlastnosť kombinačných čísel:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \tag{1}$$

Riešenie

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n (m je parameter). Základný krok platí, pretože

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{k}{m} = \binom{0}{m} = \binom{0}{m} + 0 = \binom{0}{m} + \binom{0}{m+1} \overset{(1)}{=} \binom{0+1}{m+1}.$$

Indukčný krok. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}. \tag{IP}$$

To je indukčný predpoklad. Dokážeme, že platí aj pre $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k}{m} = \binom{n+1+1}{m+1}.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} + \binom{n+1}{m} \overset{\text{IP}}{=} \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} \overset{(1)}{=} \binom{n+1+1}{m+1}.$$