

Vzorový príklad pre 3. domácu úlohu

Ján Komara

20. novembra 2013

Príklad

Nájdite obor pravdivosti výrokovej formy

$$|3x| < |2x - 1| \quad (1)$$

definovanej nad oborom reálnych čísel. Dokážte, že vaše riešenie je správne.

Návod. V dôkaze využite tieto dve vlastnosti absolútnej hodnoty reálnych čísel:

$$\forall x \forall y (|x| < y \leftrightarrow x < y \wedge -x < y) \quad (2)$$

$$\forall x \forall y (y < |x| \leftrightarrow y < x \vee y < -x). \quad (3)$$

Riešenie

Najprv dokážeme, že platí

$$\forall x \left(|3x| < |2x - 1| \leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{5} \right). \quad (4)$$

Nech x je ľubovoľné, ale pevne zvolené reálne číslo. Potom

$$\begin{aligned} |3x| < |2x - 1| &\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} |3x| < 2x - 1 \vee |3x| < -(2x - 1) \stackrel{2 \times (3)}{\Leftrightarrow} \\ 3x < 2x - 1 \wedge -3x < 2x - 1 \vee 3x < -(2x - 1) \wedge -3x < -(2x - 1) &\Leftrightarrow \\ x < -1 \wedge 1 < 5x \vee 5x < 1 \wedge -1 < x &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{5} < x < -1 \vee -1 < x < \frac{1}{5} &\Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Tým sme dokázali pomocné tvrdenie (4).

Obor pravdivosti výrokovej formy (1) je preto rovný množine

$$\left\{ x \in R \mid -1 < x < \frac{1}{5} \right\}.$$