

Vzorový príklad pre 2. domácu úlohu

Ján Komara

27. októbra 2013

Príklad

Kolko permutácií množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ nenecháva žiadne číslo na svojom mieste?

Riešenie

Nech U je množina všetkých permutácií množiny $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Symbolom A_i pre $1 \leq i \leq n$ označme množinu tých permutácií z U , ktoré nechajú i -tý prvok množiny S na svojom mieste. Množiny $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ majú rovnako veľa prvkov pre ľubovoľný výber k čísel $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Platí totiž

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| = (n - k)!.$$

Hľadaný počet je preto rovný číslu

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}| &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)!. \end{aligned}$$