12. prednáška

Trojuholníkové čísla. Zápis T_n označuje postupnosť prirodzených čísel, ktorej prvkami sú trojuholníkové čísla:

$$\mathrm{T}_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \sum_{i=0}^{n} i.$$

Postupnosť má tieto dve základné vlastnosti

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_0 &= 0 \\ \mathrm{T}_{n+1} &= \mathrm{T}_n + n + 1. \end{aligned}$$

Analytické vyjadrenie pre postupnosť trojuholníkových čísel. Pre každé prirodzené číslo n platí vzťah

$$\mathrm{T}_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n.

Základný krok. Pre $n = 0$ tvrdenie platí, pretože

$$\mathrm{T}_0 = 0 = \frac{0}{2} = \frac{0(0+1)}{2}.$$

Indukčný krok. Zvoľme si ľubovolné číslo n. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n:

$$\mathrm{T}_n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad \text{IP}$$

To je indukčný predpoklad. Dokážeme, že platí aj pre $n + 1$:

$$\mathrm{T}_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{n+1} = \mathrm{T}_n + n + 1 &\overset{\text{IP}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}. \end{aligned} \qquad \square$$

Ako rozmeniť peniaze na dvojkoruny a päťkoruny?. Pre každé prirodzené číslo $x \geq 4$ platí vzťah

$$\exists y \exists z \, x = 2y + 5z.$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa x.

Základný krok. Pre $x = 4$ tvrdenie

$$\exists y \exists z\, 4 = 2y + 5z$$

platí, pretože

$$4 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0.$$

Stačí totiž položiť $y = 2$ a $z = 0$.

Indukčný krok. Zvoľme si ľubovolné číslo $x \geq 4$. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre x. To je indukčný predpoklad. To znamená, že existujú čísla y_1 a z_1 také, že

$$x = 2y_1 + 5z_1.$$

Dokážeme, že tvrdenie platí aj pre $x + 1$:

$$\exists y \exists z\, x + 1 = 2y + 5z.$$

Uvažujme dva prípady.

Prípad $z_1 = 0$. Potom nutne $y_1 \geq 2$ (prečo?). Postupnými úpravami dostaneme

$$x + 1 = 2y_1 + 1 = 2(y_1 - 2) + 5 \cdot 1.$$

Odtiaľ plynie požadované tvrdenie pre $y = y_1 - 2$ a $z = 1$.

Prípad $z_1 \neq 0$. Postupnými úpravami dostaneme

$$x + 1 = 2y_1 + 5z_1 + 1 = 2y_1 + 5 \cdot (z_1 - 1) + 6 = 2(y_1 + 3) + 5 \cdot (z_1 - 1).$$

Odtiaľ plynie požadované tvrdenie pre $y = y_1 + 3$ a $z = z_1 - 1$. $\square$

Fibonacciho postupnosť. Zápis f_n označuje postupnosť prirodzených čísel, ktorej prvkami sú Fibonacciho čísla:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 0 \\ f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n. \end{aligned}$$

Efektívny výpočet Fibonacciho postupnosti. Uvažujme ternárnu funkciu g definovanú primitívnou rekurziou so substitúciou v parametroch:

$$\begin{aligned} g(0, a, b) &= a \\ g(n + 1, a, b) &= g(n, a + b, a). \end{aligned}$$

Tvrdíme, že platí

$$f_{n+1} = g(n, 1, 0). \tag{1}$$

Dôkaz. Najprv dokážeme pomocné tvrdenie

$$\forall k \, g(n, f_{k+1}, f_k) = f_{n+1+k}. \tag{2}$$

To dokážeme matematickou indukciou podľa n.

Základný krok. Pre $n = 0$ tvrdenie platí, pretože

$$g(0, f_{k+1}, f_k) = f_{k+1} = f_{0+1+k}.$$

Indukčný krok. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n:

$$\forall k \, g(n, f_{k+1}, f_k) = f_{n+1+k}. \tag{IP}$$

To je indukčný predpoklad. Dokážeme, že platí aj pre $n + 1$:

$$\forall k \, g(n+1, f_{k+1}, f_k) = f_{n+1+1+k}.$$

Zvoľme si ľubovolné číslo k. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} g(n+1, f_{k+1}, f_k) &= g(n, f_{k+1} + f_k, f_{k+1}) = g(n, f_{k+2}, f_{k+1}) = \\ &= g(n, f_{k+1+1}, f_{k+1}) \stackrel{\text{IP}}{=} f_{n+1+k+1} = f_{n+1+1+k}. \end{aligned}$$

Všimnime si, že sme IP použili s parametrom $k + 1$ a nie s k!

Teraz už môžeme dokázať požadované tvrdenie (1):

$$f_{n+1} = f_{n+1+0} \stackrel{(2)}{=} g(n, f_{0+1}, f_0) = g(n, f_1, f_0) = g(n, 1, 0). \qquad \square$$

Horný odhad Fibonacciho postupnosti. Pre každé prirodzené číslo n platí táto nerovnosť

$$f_n \leq 2^n.$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme úplnou matematickou indukciou podľa n.

Zvoľme si ľubovolné číslo n. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky čísla menšie ako n, t. j.

$$\forall m (m < n \to f_m \leq 2^m). \tag{IP}$$

To je indukčný predpoklad. Dokážeme, že platí aj pre n:

$$f_n \leq 2^n.$$

Uvažujme tri prípady.

Prípad $n = 0$. Vtedy tvrdenie triviálne platí, pretože

$$f_0 = 0 \leq 1 = 2^0.$$

Prípad $n = 1$. Aj vtedy tvrdenie triviálne platí, pretože

$$f_1 = 1 \leq 2 = 2^1.$$

Prípad $n \geq 2$. Potom $0 \leq n-1 < n$ a $0 \leq n-2 < n$. Postupnými úpravami dostaneme požadované tvrdenie

$$\begin{aligned} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} &\overset{\text{2xIP}}{\leq} 2^{n-1} + 2^{n-2} \leq 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} = \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n. \end{aligned}$$

Všimnime si, že sme IP použili dvakrát a to pre čísla $n-1$ a $n-2$.

Cvičenia

Príklad. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platia vzťahy

$$\begin{aligned} 8\mathrm{T}_n + 1 &= (2n+1)^2 \\ \mathrm{T}_n + \mathrm{T}_{n+1} &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Riešenie. Ukážeme tu dôkaz prvého tvrdenia matematickou indukciou podľa n. Obidve tvrdenia sa dajú tiež dokázať priamo pomocou analytického vyjadrenia pre T_n.

Základný krok. Pre $n = 0$ tvrdenie platí, pretože

$$8\mathrm{T}_0 + 1 = 8 \cdot 0 + 1 = 1 = 1^2 = (2 \cdot 0 + 1)^2.$$

Indukčný krok. Zvoľme si ľubovolné číslo n. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n:

$$8\mathrm{T}_n + 1 = (2n+1)^2. \tag{IP}$$

To je indukčný predpoklad. Dokážeme, že platí aj pre $n+1$:

$$8\mathrm{T}_{n+1} + 1 = \big(2(n+1)+1\big)^2.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} 8\mathrm{T}_{n+1} + 1 = 8(\mathrm{T}_n + n + 1) + 1 = 8\mathrm{T}_n + 1 + 8(n+1) &\overset{\text{IP}}{=} (2n+1)^2 + 8(n+1) = \\ = 4n^2 + 4n + 1 + 8n + 8 &= 4(n^2 + 2n + 1) + 4(n+1) + 1 = \\ = 4(n+1)^2 + 4(n+1) + 1 &= \big(2(n+1)+1\big)^2. \end{aligned}$$

Príklad. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n a m platí vzťah

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Riešenie. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n (m je parameter). V dôkaze využijeme túto vlastnosť kombinačných čísel:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \tag{3}$$

Základný krok. Pre $n = 0$ tvrdenie platí, pretože

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{k}{m} = \binom{0}{m} = \binom{0}{m} + 0 = \binom{0}{m} + \binom{0}{m+1} \overset{(3)}{=} \binom{0+1}{m+1}.$$

Indukčný krok. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}. \tag{IP}$$

To je indukčný predpoklad. Dokážeme, že platí aj pre $n+1$. Postupnými úpravami dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} + \binom{n+1}{m} \overset{\text{IP}}{=} \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} \overset{(3)}{=} \binom{n+1+1}{m+1}.$$

Príklad. Uvažujme postupnosť prirodzených čísel, f_n definovanú predpisom

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_2 &= 2 \\ f_{n+3} &= f_{n+2} + f_{n+1} + f_n + n + 3. \end{aligned}$$

Uvažujme ďalej funkciu g definovanú primitívnou rekurziou so substitúciou v parametroch:

$$\begin{aligned} g(0, k, a, b, c) &= a \\ g(n+1, k, a, b, c) &= g(n, k+1, a+b+c+k+3, a, b). \end{aligned}$$

Dokážte, že platí

$$f_{n+2} = g(n, 0, 2, 1, 0).$$

Návod. Najprv dokážte toto pomocné tvrdenie

$$\forall k\, g(n, k, f_{k+2}, f_{k+1}, f_k) = f_{n+2+k}.$$