Súčty

Zopakovanie.

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \tag{1}$$

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0^n \tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}. \tag{5}$$

Kombinatorické identity

1 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 1$:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + \cdots + n\binom{n}{n}. \tag{6}$$

Uvažujte tiež prípad $n = 0$. Vypočítajte (6) pre $n = 1, 2, 3$. Určte hodnotu (6) pre $n \geq 1$.

Návod. Použite najprv (1) a potom (3).

Riešenie.

$$(6) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \text{ pre } n \geq 1.$$

Dôkaz.

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} \overset{(3)}{=} n2^{n-1}.$$

2 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 2$:

$$2\binom{n}{2} + 3\cdot 2\binom{n}{3} + 4\cdot 3\binom{n}{4} + 5\cdot 4\binom{n}{5} + \cdots + n(n-1)\binom{n}{n}. \tag{7}$$

Uvažujte tiež prípad $n = 0, 1$. Vypočítajte (7) pre $n = 2, 3, 4$. Určte hodnotu (7) pre $n \geq 2$.

Návod. Použite najprv (1) a potom príklad 1.

Riešenie.

$$(7) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} \text{ pre } n \geq 2.$$

3 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 1$:

$$\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + 9\binom{n}{3} + 16\binom{n}{4} + \cdots + n^2\binom{n}{n}. \tag{8}$$

Uvažujte tiež prípad $n = 0$. Vypočítajte (8) pre $n = 1, 2, 3$. Určte hodnotu (8) pre $n \geq 2$.

Návod. Použite najprv $k^2 = k(k-1) + k$, potom príklady 2 a 1.

Riešenie.

$$(8) = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2} \text{ pre } n \geq 2.$$

4 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 0$:

$$\frac{\binom{n}{0}}{1} + \frac{\binom{n}{1}}{2} + \frac{\binom{n}{2}}{3} + \frac{\binom{n}{3}}{4} + \cdots + \frac{\binom{n}{n}}{n+1}. \tag{9}$$

Vypočítajte (9) pre $n = 0, 1, 2$. Určte hodnotu (9) pre $n \geq 0$.

Návod. Použite najprv (1) pre $\binom{n+1}{k+1}$ a potom (3).

Riešenie.

$$(9) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} \overset{(1)}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} + 1 - 1\right) = \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{0} - 1\right) = \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - 1\right) \overset{(3)}{=} \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.
\end{aligned}$$

5 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 1$:

$$-\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} - 3\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} - \cdots \pm n\binom{n}{n}. \tag{10}$$

Uvažujte tiež prípad $n = 0$. Vypočítajte (10) pre $n = 1, 2, 3$. Určte hodnotu (10) pre $n \geq 2$.

Návod. Použite najprv (1) a potom (4).

Riešenie.

$$(10) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = 0 \text{ pre } n \geq 2.$$

Dôkaz.

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1+1}\binom{n-1}{k-1} =$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k} = (-n)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k} \overset{(4)}{=} 0.$$

6 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 2$:

$$2\binom{n}{2} - 3\cdot 2\binom{n}{3} + 4\cdot 3\binom{n}{4} - 5\cdot 4\binom{n}{5} + \cdots \pm n(n-1)\binom{n}{n}. \tag{11}$$

Uvažujte tiež prípad $n = 0, 1$. Vypočítajte (11) pre $n = 2, 3, 4$. Určte hodnotu (11) pre $n \geq 3$.

Návod. Použite najprv (1) a potom príklad 5.

Riešenie.

$$(11) = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k(k-1)\binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k k(k-1)\binom{n}{k} = 0 \text{ pre } n \geq 3.$$

7 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 1$:

$$-\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} - 9\binom{n}{3} + 16\binom{n}{4} - \cdots \pm n^2\binom{n}{n}. \tag{12}$$

Uvažujte tiež prípad $n = 0$. Vypočítajte (12) pre $n = 1, 2, 3$. Určte hodnotu (12) pre $n \geq 3$.

Návod. Použite najprv $k^2 = k(k-1) + k$, potom príklady 6 a 5.

Riešenie.

$$(12) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2\binom{n}{k} = 0 \text{ pre } n \geq 3.$$

8 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 0$:

$$\frac{\binom{n}{0}}{1} - \frac{\binom{n}{1}}{2} + \frac{\binom{n}{2}}{3} - \frac{\binom{n}{3}}{4} + \cdots \pm \frac{\binom{n}{n}}{n+1}. \tag{13}$$

Vypočítajte (13) pre $n = 0, 1, 2$. Určte hodnotu (13) pre $n \geq 0$.

Návod. Použite najprv (1) pre $\binom{n+1}{k+1}$ a potom (4).

Riešenie.

$$(13) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

9 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq m \geq 0$:

$$\binom{n}{m}\binom{m}{m} + \binom{n}{m+1}\binom{m+1}{m} + \binom{n}{m+2}\binom{m+2}{m} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{m}. \tag{14}$$

Uvedomte si, čo (14) znamená pre $m = 0, 1, 2$. Určte hodnotu (14) pre $n \geq m \geq 0$.

Návod. Použite najprv (2) a potom (3).

Riešenie.

$$(14) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

Dôkaz.

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} \overset{(2)}{=} \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} = \binom{n}{m} \sum_{k=m}^{n} \binom{n-m}{k-m} =$$

$$= \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} \overset{(3)}{=} \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

10 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 1$:

$$\frac{\binom{1}{m}}{1} + \frac{\binom{2}{m}}{2} + \frac{\binom{3}{m}}{3} + \frac{\binom{4}{m}}{4} + \cdots + \frac{\binom{n}{m}}{n}. \tag{15}$$

Uvedomte si, čo (15) znamená pre $m = 0, 1, 2$. Určte hodnotu (15) pre $n, m \geq 1$.

Návod. Použite najprv (1) a potom (5).

Riešenie.

$$(15) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{k}{m}}{k} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{k}{m}}{k} = \frac{\binom{n}{m}}{m} \text{ pre } n, m \geq 1.$$

Dôkaz.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{k}{m}}{k} \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \frac{k}{m} \binom{k-1}{m-1} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} \binom{k-1}{m-1} =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{m-1} \overset{(5)}{=} \frac{1}{m} \binom{n-1+1}{m-1+1} = \frac{\binom{n}{m}}{m}.$$

11 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n, m \geq 0$:

$$\binom{0}{m} + 2\binom{1}{m} + 3\binom{2}{m} + 4\binom{3}{m} + \cdots + (n+1)\binom{n}{m}. \tag{16}$$

Uvedomte si, čo (16) znamená pre $m = 0, 1, 2$. Určte hodnotu (16) pre $n, m \geq 0$.

Návod. Použite najprv (1) pre $\binom{k+1}{m+1}$ a potom (5).

Riešenie.

$$(16) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{k}{m} = (m+1)\binom{n+2}{m+2}.$$

12 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 1$ a $m \geq 0$:

$$\binom{1}{m} + 2\binom{2}{m} + 3\binom{3}{m} + 4\binom{4}{m} + \cdots + n\binom{n}{m}. \tag{17}$$

Rozšírte (17) pre prípad $n = 0$. Uvedomte si, čo (17) znamená pre $m = 0, 1, 2$. Určte hodnotu (17) pre $n, m \geq 0$.

Návod. Použite najprv $k = k + 1 - 1$, potom príklad 11 a (5).

Riešenie.

$$(17) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{k}{m} = (m+1)\binom{n+2}{m+2} - \binom{n+1}{m+1}.$$