Súčty

Dôkazy matematickou indukciou

Príklad. Pre každé prirodzené číslo n platí vzťah

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n.

Základný krok. Pre $n = 0$ tvrdenie platí, pretože

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 = 2 - 1 = 2^1 - 1 = 2^{0+1} - 1.$$

Indukčný krok. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n. To je indukčný predpoklad (IP). Dokážeme, že platí aj pre $n+1$. Postupnými úpravami dostaneme

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} \overset{\text{IP}}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1+1} - 1. \qquad \square$$

Príklad. Pre každé prirodzené číslo $n \geq 1$ platí vzťah

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2.$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n.

Základný krok. Pre $n = 1$ tvrdenie platí, lebo

$$\sum_{i=1}^{1} (2i - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2.$$

Indukčný krok. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n \geq 1$ (IP). Dokážeme, že platí aj pre $n+1$. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) &= \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) + 2(n+1) - 1 \overset{\text{IP}}{=} n^2 + 2(n+1) - 1 = \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \qquad \square\end{aligned}$$

Poznámka. V nasledujúcom príklade využijeme túto vlastnosť kombinačných čísel:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \tag{1}$$

Príklad. Pre každé prirodzené čísla n a m platí vzťah

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n (m je parameter).

Základný krok. Pre $n = 0$ tvrdenie platí, pretože

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{k}{m} = \binom{0}{m} = \binom{0}{m} + 0 = \binom{0}{m} + \binom{0}{m+1} \overset{(1)}{=} \binom{0+1}{m+1}.$$

Indukčný krok. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n (IP). Dokážeme, že platí aj pre $n+1$. Postupnými úpravami dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k}{m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} + \binom{n+1}{m} \overset{\text{IP}}{=} \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} \overset{(1)}{=} \binom{n+1+1}{m+1}.$$

$\square$