Súčty

Dôkazy matematickou indukciou (binomická veta)

Pascalova formula. V nasledujúcich príkladoch využijeme túto vlastnosť kombinačných čísel:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \tag{1}$$

Priklad. Pre každé prirodzené číslo n platí vzťah

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{2}$$

Dôkaz. Najprv dokážeme rovnosť

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \tag{3}$$

Skutočne, ak $n = 0$, potom

$$\sum_{k=0}^{0+1} \binom{0+1}{k} = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = 2\binom{0}{0} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k}.$$

Predokladajme teraz, že $n \geq 1$. Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} \overset{(1)}{=} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) + 1 = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} + 1 = \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Tvrdenie (2) dokážeme matematickou indukciou podľa n. Základný krok. Pre $n = 0$ tvrdenie platí, pretože

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0.$$

Indukčný krok. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n (IP). Dokážeme, že platí aj pre $n + 1$. Postupnými úpravami dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \overset{(3)}{=} 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{\text{IP}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}. \qquad \square$$

Lema. *Nech n je prirodzené číslo. Potom pre ľubovolné x a y platí*

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{4}$$

Dôkaz. Postupnými úpravami dostávame

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} =$$

$$\binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1-0} \overset{(1)}{=}$$

$$x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} =$$

$$x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} =$$

$$x \left(x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{k-1} y^{n-(k-1)} \right) + y \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y^n \right) =$$

$$x \left(\binom{n}{n} x^n y^{n-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) + y \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n}{0} x^0 y^{n-0} \right) =$$

$$x \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) + y \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Tým sme dokázali vzťah (4). □

Binomická veta. *Nech n je prirodzené číslo. Potom pre ľubovolné x a y platí*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{5}$$

Dôkaz. Základný krok indukcie pre $n = 0$ odvodíme takto:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^{0-0} = 1 = (x+y)^0.$$

Predpokladajme teraz, že tvrdenie vety platí pre n (IP). Ukážeme, že platí aj pre $n+1$. Skutočne, postupnými úpravami totiž dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} \overset{(4)}{=} (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \overset{\text{IP}}{=}$$

$$= (x+y)(x+y)^n = (x+y)^{n+1}.$$

Týmto sme dokázali indukčný krok. □