# Nehomogénne rekurentné vzťahy

**Definícia.** Nehomogénny vzťah $k$-tého stupňa je lineárny rekurentný vzťah s konštantnými koeficientami v tvare

$$\sum_{i=0}^{k} C_i a_{n-i} = f(n), \tag{4}$$

kde $n \geq k \geq 1$, $C_0, C_{n-k} \neq 0$ a $\exists n\, f(n) \neq 0$.

**Všeobecné riešenie.** Všeobecné riešenie vzťahu (4) hľadáme v tvare

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)},$$

kde $a_n^{(h)}$ je všeobecné riešenie pridruženého homogenného vzťahu

$$\sum_{i=0}^{k} C_i a_{n-i} = 0 \tag{5}$$

a $a_n^{(p)}$ je jedno z riešení nehomogenného vzťahu (4).

**Partikulárne riešenie.** Nasledujúca tabuľka obsahuje zoznam partikulárnych riešení $a_n^{(p)}$ nehomogenného vzťahu (4) pre niektoré vybrané funkcie $f(n)$.

| $f(n)$ | $t(n)$ | $a_n^{(p)}$ |
|---|---|---|
| $n^m$ | $A_m n^m + A_{m-1} n^{m-1} + \cdots + A_1 n + A_0$ | $n^s t(n)$ |
| $q^n$ | $Aq^n$ | $n^s t(n)$ |
| $n^m q^n$ | $(A_m n^m + A_{m-1} n^{m-1} + \cdots + A_1 n + A_0) q^n$ | $n^s t(n)$ |
| $f_1(n) + f_2(n)$ | | $(a_n^{(p)})_1 + (a_n^{(p)})_2$ |

Vysvetlenie tabuľky:

- Ak $f(n)$ je konštantný násobok niektorej z funkcií v prvom stĺpci, potom pridružené *pokusné* partikulárne riešenie $t(n)$ sa nachádza v odpovedajúcej položke druhého riadku. Tu $m \in \mathrm{N}$ a $A_i, q \in \mathrm{R}$.
- Nech $t(n) = t_1(n) + \cdots + t_r(n)$. Nech $s$ je najmenšie prirodzené číslo také, že $n^s t_j(n)$ nie je riešením pridruženého homogenného vzťahu (5) pre každé $j = 1, \ldots, r$. Potom $a_n^{(p)} = n^s t(n)$ je riešením nehomogenného vzťahu (4).
- Nech $(a_n^{(p)})_j$, $j = 1, 2$, je riešením nehomogenného vzťahu

  $$\sum_{i=0}^{k} C_i a_{n-i} = f_j(n).$$

  Potom $a_n^{(p)} = (a_n^{(p)})_1 + (a_n^{(p)})_2$ je riešením nehomogenného vzťahu (4) s pravou stranou $f(n) = f_1(n) + f_2(n)$.