11. prednáška

Nehomogénne rekurentné vzťahy

Príklad. Koľko slov dĺžky n nad abecedou $\{0, 1, 2\}$ má nepárny počet 0?

Riešenie. Označme a_n hľadaný počet slov dĺžky $n \geq 0$. Potom

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \times 2 = 4 \\ a_3 &= 3 \times 2^2 + 1 = 13. \end{aligned}$$

Pre $n \geq 1$ sa ľahko ukáže, že platí

$$a_n = 2a_{n-1} + (3^{n-1} - a_{n-1}) = a_{n-1} + 3^{n-1}.$$

Skúška správnosti

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 + 3^{1-1} = 1 \\ a_2 &= 1 + 3^{2-1} = 4 \\ a_3 &= 4 + 3^{3-1} = 13. \end{aligned}$$

Rekurentný vzťah pre a_n má teda tvar:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= a_{n-1} + 3^{n-1} \quad \text{pre } n \geq 1. \end{aligned}$$

Pri riešení rekurentného vzťahu vychádzame z tejto vlastnosti

$$a_n - a_0 = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1}.$$

Riešenie rekurentného vzťahu má preto tvar

$$a_n = a_0 + \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Skúška správnosti

$$a_3 = \frac{3^3 - 1}{2} = \frac{27 - 1}{2} = \frac{26}{2} = 13.$$

Príklad. Koľko slov dĺžky n nad abecedou $\{0, 1, 2, 3\}$ má nepárny počet 0?

Riešenie. Označme a_n hľadaný počet slov dĺžky $n \geq 0$. Potom

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \times 3 = 6 \\ a_3 &= 3 \times 3^2 + 1 = 28. \end{aligned}$$

Pre $n \geq 1$ sa ľahko ukáže, že platí

$$a_n = 3a_{n-1} + (4^{n-1} - a_{n-1}) = 2a_{n-1} + 4^{n-1}.$$

Skúška správnosti

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \times 0 + 4^{1-1} = 1 \\ a_2 &= 2 \times 1 + 4^{2-1} = 6 \\ a_3 &= 2 \times 6 + 4^{3-1} = 28. \end{aligned}$$

Rekurentný vzťah pre a_n má teda tvar:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= 2a_{n-1} + 4^{n-1} \quad \text{pre } n \geq 1. \end{aligned}$$

Riešenie rekurentného vzťahu hľadáme v tvare

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)},$$

kde $a_n^{(p)}$ je partikulárne riešenie nehomogenného rekurentného vzťahu a $a_n^{(h)}$ je všeobecné riešenie príslušneho homogenného rekurentného vzťahu

$$a_n - 2a_{n-1} = 0 \quad \text{pre } n \geq 1.$$

Partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$a_n^{(p)} = A4^n.$$

Po dosadení do nehomogenného rekurentného vzťahu postupne dostaneme

$$A4^n = 2A4^{n-1} + 4^{n-1} \Rightarrow A4 = 2A + 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Všeobecné riešenie nehomogenného rekurentného vzťahu hľadáme preto v tvare

$$a_n = \frac{1}{2} \times 4^n + B2^n = \frac{4^n}{2} + B2^n.$$

Po dosadení do počiatočnej podmienky $a_0 = 0$ postupne dostaneme

$$0 = \frac{4^0}{2} + B2^0 = \frac{1}{2} + B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}.$$

Riešenie rekurentného vzťahu má teda tvar

$$a_n = \frac{4^n}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2^n = \frac{4^n - 2^n}{2}.$$

Skúška správnosti

$$a_3 = \frac{4^3 - 2^3}{2} = \frac{64 - 8}{2} = \frac{56}{2} = 28.$$

Príklad. Koľko slov dĺžky n nad abecedou $\{0, 1, 2\}$ je takých, že za žiadnym výskytom znaku 0 v takom slove sa nachádza znak 1 (nie nutne bezprostredne)?

Riešenie. Označme a_n hľadaný počet slov dĺžky $n \geq 0$. Potom

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 3 \\ a_2 &= 3^2 - 1 = 8. \end{aligned}$$

Pre $n \geq 1$ sa ľahko ukáže, že platí

$$a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}.$$

Skúška správnosti

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \times 1 + 2^{1-1} = 3 \\ a_2 &= 2 \times 3 + 2^{2-1} = 8 \\ a_3 &= 2 \times 8 + 2^{3-1} = 20. \end{aligned}$$

Rekurentný vzťah pre a_n má teda tvar:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_n &= 2a_{n-1} + 2^{n-1} \quad \text{pre } n \geq 1. \end{aligned}$$

Riešenie rekurentného vzťahu hľadáme v tvare

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)},$$

kde $a_n^{(p)}$ je partikulárne riešenie nehomogenného rekurentného vzťahu a $a_n^{(h)}$ je všeobecné riešenie príslušneho homogenného rekurentného vzťahu

$$a_n - 2a_{n-1} = 0 \quad \text{pre } n \geq 1.$$

Partikulárne riešenie hľadáme v tvare

$$a_n^{(p)} = An2^n.$$

Po dosadení do nehomogenného rekurentného vzťahu postupne dostaneme

$$\begin{aligned} &An2^n = 2A(n-1)2^{n-1} + 2^{n-1} \Rightarrow An2 = 2An - 2A + 1 \Rightarrow \\ &\quad 0 = -2A + 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Všeobecné riešenie nehomogenného rekurentného vzťahu hľadáme preto v tvare

$$a_n = \frac{1}{2} \times n2^n + B2^n = \frac{n2^n}{2} + B2^n.$$

Po dosadení do počiatočnej podmienky $a_0 = 1$ postupne dostaneme

$$1 = \frac{0 \times 2^0}{2} + B2^0 = B \Rightarrow B = 1.$$

Riešenie rekurentného vzťahu má teda tvar

$$a_n = \frac{n2^n}{2} + 1 \times 2^n = (n+2)2^{n-1}.$$

Skúška správnosti

$$a_3 = (3+2)2^{3-1} = 5 \times 4 = 20.$$