

Neúplný podiel a zvyšok po delení

Neúplný podiel. Symbolom $x \div y$ označíme neúplný podiel celého čísla x číslom y . Operácia je definovaná nad oborom \mathbb{Z} týmto vzťahom:

$$x \div y = q \leftrightarrow y \neq 0 \wedge \exists r(x = qy + r \wedge 0 \leq r < |y|) \vee y = 0 \wedge q = 0.$$

Zvyšok po delení. Symbolom $x \bmod y$ označíme zvyšok po delení celého čísla x číslom y . Operácia je definovaná nad oborom \mathbb{Z} týmto vzťahom:

$$x \bmod y = r \leftrightarrow y \neq 0 \wedge \exists q(x = qy + r \wedge 0 \leq r < |y|) \vee y = 0 \wedge r = 0.$$

Poznámka. Priamo z definície dostaneme, že platí

$$\begin{aligned} y \neq 0 \rightarrow x &= x \div yy + x \bmod y \wedge 0 \leq x \bmod y < |y| \\ x \div 0 &= 0 = x \bmod 0. \end{aligned}$$

Príklad. Ľahko zistíme, že

$$\begin{aligned} 17 \div 5 &= 3 \wedge 17 \bmod 5 = 2 \\ (-17) \div 5 &= -4 \wedge (-17) \bmod 5 = 3 \\ 17 \div (-5) &= -3 \wedge 17 \bmod (-5) = 2 \\ (-17) \div (-5) &= 4 \wedge (-17) \bmod (-5) = 3. \end{aligned}$$

Platí totiž

$$\begin{aligned} 17 &= 3 \times 5 + 2 \wedge 0 \leq 2 < |5| \\ -17 &= (-4) \times 5 + 3 \wedge 0 \leq 3 < |5| \\ 17 &= (-3) \times (-5) + 2 \wedge 0 \leq 2 < |-5| \\ -17 &= 4 \times (-5) + 3 \wedge 0 \leq 3 < |-5|. \end{aligned}$$

Poznámka. Vzťah medzi deliteľnosťou čísel a zvyškom po delení zachycuje nasledujúca vlastnosť:

$$y \neq 0 \rightarrow x | y \leftrightarrow x \bmod y = 0.$$

Otázka: je nutné uvádzať v tvrdení predpoklad $y \neq 0$?