Dôkaz sporom

Odmocnina prirodzeného čísla

Úvod. V nasledujúcich príkladoch si ukážeme, že reálne číslo $\sqrt[n]{x}$ nie je racionálne pre niektoré vybrané prirodzené čísla n a x. Najprv ale uvedieme jednú dôležitú vlastnosť prvočísel, ktorú tu budeme potrebovať.

Lema.

$$Prime(p) \wedge p \mid x_1 x_2 \dots x_n \to p \mid x_1 \vee p \mid x_2 \vee \dots \vee p \mid x_n. \tag{1}$$

Príklad. Dokážte, že $\sqrt[2]{2}$ nie je racionálne číslo.

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme naopak, že $\sqrt[2]{2}$ je racionálne číslo. Potom existujú nesúdeliteľné prirodzené čísla $a, b > 0$ také, že

$$\sqrt[2]{2} = \frac{a}{b}.$$

Rovnosť zapíšeme ekvivalentne takto

$$2b^2 = a^2. \tag{2}$$

Odtiaľ plynie, že

$$2 \mid 2b^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} 2 \mid a^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2 \mid a \Rightarrow 2^2 \mid a^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} 2^2 \mid 2b^2 \Rightarrow 2 \mid b^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2 \mid b.$$

Preto $2 \mid a$ a $2 \mid b$. To je v spore s nesúdeliteľnosťou čísel a a b. □

Príklad. Dokážte, že $\sqrt[5]{2^8 3^{10}}$ nie je racionálne číslo.

Dôkaz. Pretože

$$\sqrt[5]{2^8 3^{10}} = \sqrt[5]{2^3} \times 2 \times 3^2,$$

stačí ukázať, že $\sqrt[5]{2^3}$ nie je racionálne číslo. Dokážeme to sporom. Nech naopak číslo $\sqrt[5]{2^3}$ je racionálne. Potom existujú nesúdeliteľné prirodzené čísla $a, b > 0$ také, že platí rovnosť

$$\sqrt[5]{2^3} = \frac{a}{b}.$$

Toto je vhodné zapísať ekvivalentne takto

$$2^3 b^5 = a^5. \tag{3}$$

Teraz dostaneme

$$2 \mid 2^3 b^5 \overset{(3)}{\Rightarrow} 2 \mid a^5 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2 \mid a \Rightarrow 2^5 \mid a^5 \overset{(3)}{\Rightarrow} 2^5 \mid 2^3 b^5 \Rightarrow 2^2 \mid b^5 \Rightarrow 2 \mid b^5 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2 \mid b.$$

Čiže $2 \mid a$ a $2 \mid b$. To je v spore s nesúdeliteľnosťou čísel a a b. □