Binomická a multinomická veta

Binomická veta

Pascalova formula.

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}. \tag{1}$$

Lema. *Nech n je prirodzené číslo. Potom pre ľubovolné x a y platí*

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{2}$$

Dôkaz. Postupnými úpravami dostávame

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} =$$

$$\binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1-0} \stackrel{(1)}{=}$$

$$x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} =$$

$$x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} =$$

$$x \left(x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{k-1} y^{n-(k-1)} \right) + y \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y^n \right) =$$

$$x \left(\binom{n}{n} x^n y^{n-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) + y \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + \binom{n}{0} x^0 y^{n-0} \right) =$$

$$x \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) + y \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Tým sme dokázali vzťah (2). □

Binomická veta. *Nech n je prirodzené číslo. Potom pre ľubovolné x a y platí*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{3}$$

Dôkaz. Základný krok indukcie pre $n = 0$ odvodíme takto:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^{0-0} = 1 = (x+y)^0.$$

Predpokladajme teraz, že tvrdenie vety platí pre n (IP). Ukážeme, že platí aj pre $n+1$. Skutočne, postupnými úpravami totiž dostaneme

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} \overset{(2)}{=} (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \overset{\text{IP}}{=}$$
$$= (x+y)(x+y)^n = (x+y)^{n+1}.$$

Týmto sme dokázali indukčný krok. $\square$

Úloha. Dokážte matematickou indukciou tento tvar binomickej vety:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Návod. Dokážte najprv

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k = (1+x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Vlastnosť sa využije v dôkaze indukčného kroku.

Úloha. Dokážte matematickou indukciou tento vzťah

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Návod. Dokážte najprv

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Vlastnosť sa využije v dôkaze indukčného kroku.

Multinomická veta

Úloha. Určite koeficient pri x^4 vo výraze $(1-x+2x^2)^5$.

Návod. Táto úloha bola vyriešená na 4. prednáške. Pozri tiež príklad 3.3.7 na str. 21 v texte *Knor, M.: Kombinatorika a teória grafov I, MFF UK, Bratislava 2000.*