Príklady ku 4. prednáške

Základné kombinatorické identity.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{1}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \tag{2}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \tag{3}$$

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} \tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0^n \tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m} \tag{8}$$

$$\sum_{i+j=k}\binom{m}{i}\binom{n}{j} = \binom{m+n}{k}. \tag{9}$$

4.1 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 1$:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + \cdots + n\binom{n}{n}. \tag{10}$$

Uvažujte tiež prípad $n = 0$. Vypočítajte (10) pre $n = 1, 2, 3$. Určte hodnotu (10) pre $n \geq 1$.

Návod. Použite najprv (3) a potom (5).

Riešenie.

$$(10) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \text{ pre } n \geq 1.$$

Dôkaz.

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \overset{(3)}{=} \sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} \overset{(5)}{=} n2^{n-1}.$$

4.2 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 2$:

$$2\binom{n}{2} + 3 \cdot 2\binom{n}{3} + 4 \cdot 3\binom{n}{4} + 5 \cdot 4\binom{n}{5} + \cdots + n(n-1)\binom{n}{n}. \tag{11}$$

Uvažujte tiež prípad $n = 0, 1$. Vypočítajte (11) pre $n = 2, 3, 4$. Určte hodnotu (11) pre $n \geq 2$.

Návod. Použite najprv (3) a potom príklad 4.1.

Riešenie.

$$(11) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} \text{ pre } n \geq 2.$$

4.3 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 1$:

$$\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} + 9\binom{n}{3} + 16\binom{n}{4} + \cdots + n^2\binom{n}{n}. \tag{12}$$

Uvažujte tiež prípad $n = 0$. Vypočítajte (12) pre $n = 1, 2, 3$. Určte hodnotu (12) pre $n \geq 2$.

Návod. Použite najprv $k^2 = k(k-1) + k$, potom príklady 4.2 a 4.1.

Riešenie.

$$(12) = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2} \text{ pre } n \geq 2.$$

4.4 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 0$:

$$\frac{\binom{n}{0}}{1} + \frac{\binom{n}{1}}{2} + \frac{\binom{n}{2}}{3} + \frac{\binom{n}{3}}{4} + \cdots + \frac{\binom{n}{n}}{n+1}. \tag{13}$$

Vypočítajte (13) pre $n = 0, 1, 2$. Určte hodnotu (13) pre $n \geq 0$.

Návod. Použite najprv (3) pre $\binom{n+1}{k+1}$ a potom (5).

Riešenie.

$$(13) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Dôkaz.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} \overset{(3)}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} + 1 - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{0} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - 1\right) \overset{(5)}{=} \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

4.5 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 1$:

$$-\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} - 3\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} - \cdots \pm n\binom{n}{n}. \tag{14}$$

Uvažujte tiež prípad $n = 0$. Vypočítajte (14) pre $n = 1, 2, 3$. Určte hodnotu (14) pre $n \geq 2$.

Návod. Použite najprv (3) a potom (6).

Riešenie.

$$(14) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = 0 \text{ pre } n \geq 2.$$

Dôkaz.

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} \overset{(3)}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1+1}\binom{n-1}{k-1} =$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k} = (-n)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k} \overset{(6)}{=} 0.$$

4.6 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 2$:

$$2\binom{n}{2} - 3\cdot 2\binom{n}{3} + 4\cdot 3\binom{n}{4} - 5\cdot 4\binom{n}{5} + \cdots \pm n(n-1)\binom{n}{n}. \tag{15}$$

Uvažujte tiež prípad $n = 0, 1$. Vypočítajte (15) pre $n = 2, 3, 4$. Určte hodnotu (15) pre $n \geq 3$.

Návod. Použite najprv (3) a potom príklad 4.5.

Riešenie.

$$(15) = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k(k-1)\binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k k(k-1)\binom{n}{k} = 0 \text{ pre } n \geq 3.$$

4.7 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 1$:

$$-\binom{n}{1} + 4\binom{n}{2} - 9\binom{n}{3} + 16\binom{n}{4} - \cdots \pm n^2\binom{n}{n}. \tag{16}$$

Uvažujte tiež prípad $n = 0$. Vypočítajte (16) pre $n = 1, 2, 3$. Určte hodnotu (16) pre $n \geq 3$.

Návod. Použite najprv $k^2 = k(k-1) + k$, potom príklady 4.6 a 4.5.

Riešenie.

$$(16) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 \binom{n}{k} \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 \binom{n}{k} = 0 \text{ pre } n \geq 3.$$

4.8 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 0$:

$$\frac{\binom{n}{0}}{1} - \frac{\binom{n}{1}}{2} + \frac{\binom{n}{2}}{3} - \frac{\binom{n}{3}}{4} + \cdots \pm \frac{\binom{n}{n}}{n+1}. \tag{17}$$

Vypočítajte (17) pre $n = 0, 1, 2$. Určte hodnotu (17) pre $n \geq 0$.

Návod. Použite najprv (3) pre $\binom{n+1}{k+1}$ a potom (6).

Riešenie.

$$(17) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

4.9 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq m \geq 0$:

$$\binom{n}{m}\binom{m}{m} + \binom{n}{m+1}\binom{m+1}{m} + \binom{n}{m+2}\binom{m+2}{m} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{m}. \tag{18}$$

Uvedomte si, čo (18) znamená pre $m = 0, 1, 2$. Určte hodnotu (18) pre $n \geq m \geq 0$.

Návod. Použite najprv (4) a potom (5).

Riešenie.

$$(18) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

Dôkaz.

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} \overset{(4)}{=} \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} = \binom{n}{m} \sum_{k=m}^{n} \binom{n-m}{k-m} =$$

$$= \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} \overset{(5)}{=} \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

4.10 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 1$:

$$\frac{\binom{1}{m}}{1} + \frac{\binom{2}{m}}{2} + \frac{\binom{3}{m}}{3} + \frac{\binom{4}{m}}{4} + \cdots + \frac{\binom{n}{m}}{n}. \tag{19}$$

Uvedomte si, čo (19) znamená pre $m = 0, 1, 2$. Určte hodnotu (19) pre $n, m \geq 1$.

Návod. Použite najprv (3) a potom (7).
Riešenie.

$$(19) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{k}{m}}{k} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{k}{m}}{k} = \frac{\binom{n}{m}}{m} \text{ pre } n, m \geq 1.$$

Dôkaz.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{k}{m}}{k} \overset{(3)}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \frac{k}{m} \binom{k-1}{m-1} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} \binom{k-1}{m-1} =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{m-1} \overset{(7)}{=} \frac{1}{m} \binom{n-1+1}{m-1+1} = \frac{\binom{n}{m}}{m}.$$

4.11 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n, m \geq 0$:

$$\binom{0}{m} + 2\binom{1}{m} + 3\binom{2}{m} + 4\binom{3}{m} + \cdots + (n+1)\binom{n}{m}. \tag{20}$$

Uvedomte si, čo (20) znamená pre $m = 0, 1, 2$. Určte hodnotu (20) pre $n, m \geq 0$.
Návod. Použite najprv (3) pre $\binom{k+1}{m+1}$ a potom (7).
Riešenie.

$$(20) = \sum_{k=0}^{n} (k+1) \binom{k}{m} = (m+1) \binom{n+2}{m+2}.$$

4.12 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 1$ a $m \geq 0$:

$$\binom{1}{m} + 2\binom{2}{m} + 3\binom{3}{m} + 4\binom{4}{m} + \cdots + n\binom{n}{m}. \tag{21}$$

Rozšírte (21) pre prípad $n = 0$. Uvedomte si, čo (21) znamená pre $m = 0, 1, 2$. Určte hodnotu (21) pre $n, m \geq 0$.
Návod. Použite najprv $k = k + 1 - 1$, potom príklad 4.11 a (7).
Riešenie.

$$(21) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{k}{m} = (m+1) \binom{n+2}{m+2} - \binom{n+1}{m+1}.$$

4.13 Príklad. Vyjadrite pomocou sumačnej notácie pre $n \geq 0$:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2. \tag{22}$$

Vypočítajte (22) pre $n = 0, 1, 2$. Určte hodnotu (22) pre $n \geq 0$.
Návod. Použite najprv (1) pre $\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ a potom (9).
Riešenie.

$$(22) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$