1. prednáška

Logika

Negácia. Negácia tvrdenia φ je tvrdenie, ktoré je pravdivé práve vtedy, keď tvrdenie φ je nepravdivé. Negáciu z tvrdenia φ značíme takto

$$(\neg\varphi)$$

a čítame takto:

neplatí φ.

Konjunkcia. Konjunkcia tvrdení φ a ψ je tvrdenie, ktoré je pravdivé práve vtedy, keď obe tvrdenia φ, ψ sú pravdivé. Konjunkciu týchto dvoch tvrdení značíme takto

$$(\varphi \wedge \psi)$$

a čítame takto:

platí φ a (zároveň) platí ψ.

Disjunkcia. Disjunkcia tvrdení φ a ψ je tvrdenie, ktoré je pravdivé práve vtedy, keď aspoň jedno z tvrdení φ, ψ je pravdivé. Disjunkciu týchto dvoch tvrdení značíme takto

$$(\varphi \vee \psi)$$

a čítame takto:

platí φ alebo platí ψ.

Ekvivalencia. Ekvivalencia tvrdení φ a ψ je tvrdenie, ktoré je pravdivé práve vtedy, keď obe tvrdenia φ, ψ sú súčasne pravdivé alebo sú súčasne nepravdivé. Ekvivalencia týchto dvoch tvrdení značíme takto

$$(\varphi \leftrightarrow \psi)$$

a čítame takto:

φ platí práve vtedy a len vtedy, keď platí ψ.

Universálny kvantifikátor. Všeobecné tvrdenie utvorené z tvrdenia $\varphi[x]$ je tvrdenie, ktoré je pravdivé práve vtedy, keď tvrdenie $\varphi[x]$ je pravdivé pre každý element x danej oblasti. Všeobecné tvrdenie značíme takto

$$(\forall x \varphi[x])$$

a čítame takto:

pre každé x platí $\varphi[x]$.

Poznámka. Pre zlepšenie čitateľnosti zápisu tvrdení budeme vynechávať niektoré zátvorky. Najvyššiu prioritu prisudzujeme kvantifikátorom a negácii. Nasleduje konjunkcia, potom disjunkcia a nakoniec ekvivalencia. Ďalšie zjednodušenie dosiahneme tým, že necháme binárne výrokovo-logické spojky asociovať doprava. Napríklad tvrdenie

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \leftrightarrow \neg\varphi_3 \vee \forall x \varphi_4 \wedge \varphi_5 \wedge \varphi_6$$

zastupuje tvrdenie

$$((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leftrightarrow ((\neg\varphi_3) \vee ((\forall x \varphi_4) \wedge (\varphi_5 \wedge \varphi_6)))).$$

Množiny

Prvky množiny. Označenie $x \in A$ (čítaj "x je prvkom A"). Negácia $\neg x \in A$ sa skrátene zapisuje takto: $x \notin A$.

Rovnosť množín.

$$A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Počet prvkov konečnej množiny. Označenie $|A|$.

Určenie množíny. Vymenovaním jej prvkov:

$$\{a_1, \ldots, a_n\}.$$

Určením podmienky, ktoré majú spĺňať jej prvky:

$$\{x \in A \mid \varphi[x]\}.$$

Prázdna množína. Označenie $\emptyset$.

Zjednotenie množín. Označenie $A \cup B$.

$$\forall x (x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B).$$

Prienik množín. Označenie $A \cap B$.

$$\forall x (x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B).$$

Karteziánsky súčin množín. Označenie $A \times B$.

$$\forall x \forall y \big((x, y) \in A \times B \leftrightarrow x \in A \wedge y \in B\big).$$

Číselné obory

Prirodzené a celé čísla. Na tomto predmete sa budeme venovať hlavne prirodzeným číslam

$$\mathrm{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

a celým číslam

$$\mathrm{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Oba obory sú uzavreté na operácie sčítania $x + y$ a násobenia $x \times y$ (skrátene xy, tiež $x \cdot y$). Obor celých čísel je tiež uzavretý na operáciu odčítania, čo ovšem neplatí pre prirodzené čísla. Máme totiž $3 - 5 = -2 < 0$.

Exponenciála. Binárna exponenciálna funkcia x^n na prirodzených číslach má túto rekurzívnu definíciu:

$$\begin{aligned} x^0 &= 1 \\ x^{n+1} &= x \times x^n. \end{aligned}$$

Tu si všimnime, že $x^n = 0 \leftrightarrow x = 0 \wedge n \neq 0$ a $x^n = 1 \leftrightarrow x = 1 \vee n = 0$.

Kombinatorika

Permutácie. Počet permutácií n-prvkovej množiny je

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Funkcia $n!$ má túto rekurzívnu definíciu nad oborom prirodzených čísel:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ (n+1)! &= (n+1) \times n!. \end{aligned}$$

Variácie. Počet variácií k-tej triedy z n prvkov je

$$n^{\underline{k}} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1).$$

Všimnime si, že pre $k \leq n$ platí rovnosť

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$