Domáca úloha 9 a 10 Diskrétna matematika I Zima 2009-10

Zadané: Pondelok, 7. decembra
Odovzdať: Do piatku **18.decembra** vášmu cvičiacemu.
Toto je posledná úloha v tomto semestri.

Príklady vypracujte podrobne. Píšte tak, aby človek, ktorý bude vašu úlohu kontrolovať, mohol ľahko sledovať vaše argumenty a sled vašich myšlienok. Výsledok bez zdôvodnenia nestačí. Neodpisujte riešenia iných. Každý príklad napíšte na novú stranu papiera a viditeľne označte, o ktorý príklad ide. Používajte notáciu a terminológiu, ktorú sme zaviedli na prednáške a cvičeniach.

Úloha je za 20 bodov

1. Dokážte, že pre všetky celé čísla a, b, c, ak $a \nmid bc$, tak $a \nmid b$ a $a \nmid c$.
2. Nech $n \in \mathbb{N}$. Dokážte, že $3|(7^n - 4^n)$.
3. Definujme množinu $X \subseteq \mathbb{Z}^+$ rekurzívne takto:
   (a) $3 \in X$ a
   (b) ak $a, b \in X$, tak $a + b \in X$.

   Ukážte, že $X = \{3k | k \in \mathbb{Z}^+\}$, množina všetkých kladných celých čísel deliteľných tromi.
4. Pre každú z nasledujúcich dvojíc $a, b \in \mathbb{Z}^+$, určte $\gcd(a, b)$ a vyjadrite ho ako lineárnu kombináciu a a b.
   (a) $231, 1820$
   (b) $1369, 2597$
   (c) $2689, 4001$
5. Pre každé $n \in \mathbb{Z}^+$, určte $\gcd(n, n+1)$ a $\operatorname{lcm}(n, n+1)$.
6. (a) Každé z nasledujúcich čísel napíšte ako súčin prvočísel $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ kde $\alpha_i > 0$, pre všetky $1 \leq i \leq k$ a $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$.
      i. 148500
      ii. 7114800
      iii. 7882875
   (b) Určte najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok pre každú dvojicu čísel z časti (a).
   (c) Nájdite počet kladných deliteľov pre každé z čísel v časti (a).

7. Dokážte, že $\sqrt{p}$ je iracionálne číslo pre každé prvočíslo p.
8. Nech je univerzum $\mathcal{U} = \{1,2,3,4,5\}$ a množiny $A = \{1,2,3\}$ a $B = \{2,4,5\}$. Nájdite príklad
   (a) troch neprázdnych relácií z A do B.
   (b) troch neprázdnych relácií na A.
9. Nech $\mathcal{U} = \mathbb{R}$. Načrtnite reláciu $\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$. Čo sa stane, ak $\mathcal{U}$ je $\mathbb{R}^+$?
10. Nech A, B sú množiny a nech $|B| = 3$. Ak máme 4096 relácií z A do B, nájdite $|A|$.