Domáca úloha 8 Diskrétna matematika I Zima 2009-10

Zadané: Utorok, 1. decembra
Odovzdať: V týždni od **7.decembra**, na ziačiatku vašich cvičení.

Príklady vypracujte podrobne. Píšte tak, aby človek, ktorý bude vašu úlohu kontrolovať mohol ľahko sledovať vaše argumenty a sled vašich myšlienok. Výsledok bez zdôvodnenia nestačí. Neodpisujte riešenia iných. Každý príklad napíšte na novú stranu papiera a viditeľne označte, o ktorý príklad ide. Používajte notáciu a terminológiu, ktorú sme zaviedli na prednáške a cvičeniach.

Úloha je za 10 bodov

1. Dokážte nasledujúce tvrdenia použitím matematickej indukcie:

   (a)
   $$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

   (b)
   $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

   (c)
   $$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

   (d)
   $$\sum_{i=1}^{n} (i)(i!) = (n+1)! - 1$$

2. Uvažujte šachovnicu rozmerov $2^k \times 2^k$, bez ľavého horného štvorčeka. Dokážte (indukciou), že táto šachovnica sa dá presne pokryť kachličkami veľkosti troch šachovnicových políčok usporiadaných do **L**.

3. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}, n > 3$ je $2^n < n!$.

4. Matematickou indukciou dokážte, že všetky celočíselné obnosy väčšie ako 3, sa dajú zostaviť z dvojeuroviek a päťeuroviek.

5. Pre $n \geq 0$, nech F_n označuje n-té Fibonacciho číslo. Dokážte, že:

   $$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \sum_{i=0}^{k} F_i^2 = F_k \cdot F_{k+1}$$

6. Napíšte rekurzívnu definíciu množiny všetkých párnych prirodzených čísel.